МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Рубцовский индустриальный институт (филиал)
ФГБОУ ВПО «Алтайский государственный технический университет
им. И.И. Ползунова»

Т.В. Крюкова

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

**Методическое пособие
для студентов дневной формы обучения направлений
КТМ и ТМО**

Рубцовск 2013

УДК 517.5

Крюкова Т.В. Векторная алгебра: Методическое пособие для студентов дневной формы обучения направлений КТМ и ТМО / Рубцовский индустриальный институт. – Рубцовск, 2013. – 34 с.

Методическое пособие содержит основные сведения по теме «Векторы», решение типовых примеров, варианты заданий для самостоятельной работы и контрольной работы, также прилагаются тестовые задания. Рекомендовано студентам направлений Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств и Технологические машины и оборудование очной формы обучения.

Рассмотрено и одобрено на заседании НМС Рубцовского индустриального института
Протокол № 9 от 19.12.13 г.

Рецензент: к.ф. – м.н. В.Г. Дудник

СОДЕРЖАНИЕ

1. ВЕКТОРЫ

1.1. Понятие вектора

Различают *скалярные* величины (такие, как масса, температура, плотность) и *векторные* величины (сила, скорость, ускорение и т.п.). Скалярные величины могут быть охарактеризованы одним числом, выражающим отношение этой величины к единице измерения. Для векторной величины одного числа недостаточно: они обладают еще и направленностью. Для отвлеченного выражения конкретных физических величин служат *геометрические векторы.*

Определение. *Вектором* называется направленный отрезок (упорядоченная пара точек). К векторам относится также и *нулевой* вектор, начало и конец которого совпадают.

Определение. *Длиной (модулем)* вектора называется расстояние между началом и концом вектора:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\vec{a}\right|.$$

Определение. Векторы называются *коллинеарными*, если они расположены на одной или параллельных прямых. Нулевой вектор коллинеарен любому вектору.

Определение. Векторы называются *компланарными*, если существует плоскость, которой они параллельны.

Коллинеарные векторы всегда компланарны, но не все компланарные векторы коллинеарны.

Определение. Векторы называются *равными*, если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют одинаковые модули.

Всякие векторы можно привести к общему началу, т.е. построить векторы, соответственно равные данным и имеющие общее начало. Из определения равенства векторов следует, что любой вектор имеет бесконечно много векторов, равных ему.

Определение. Вектор, длина которого равна единице, называется *единичным* вектором и обозначается через $\vec{e}$. Единичный вектор, направление которого совпадает с направление вектора $\vec{a}$, называется *ортом* вектора $\vec{a}$ и обозначается $\vec{a}^{\,0}$.

1.2. Произведение вектора на число

Произведение вектора $\vec{a}$ на действительное число λ называется вектор $\lambda\vec{a}$, удовлетворяющий трем условиям: 1) модуль вектора $\lambda\vec{a}$ равен $|\lambda|\cdot\left|\vec{a}\right|$; 2) вектор $\lambda\vec{a}$ коллинеарен вектору $\vec{a}$; 3) $\lambda\vec{a}$ и $\vec{a}$ направлены одинаково, если

$\lambda > 0$, и противоположно, если $\lambda < 0$ (если $\lambda = 0$, то $\lambda\vec{a} = \vec{0}$, т.е. представляет собой нулевой вектор).

Вектор $(-1)\vec{a}$ или $-\vec{a}$ называется *противоположным* вектором по отношению к вектору $\vec{a}$.

1.3. Сумма векторов

Сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{a} + \vec{b}$, получаемый либо по *правилу параллелограмма*, либо по *правилу треугольника*. При этом подразумевается, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ предварительно должны занять положение, показанное на этих рисунках (рис. 1). Этого всегда можно добиться надлежащим параллельным переносом.

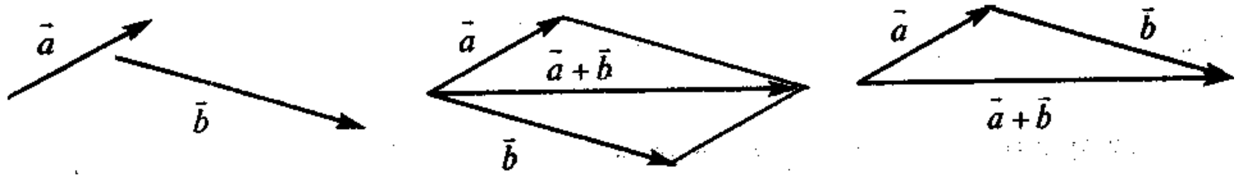

Рис. 1

Сумму произвольного числа векторов $\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + ... + \overrightarrow{a_n}$ можно построить по следующем правилу: приложим вектор $\overrightarrow{a_2}$ к концу вектора $\overrightarrow{a_1}$, вектор $\overrightarrow{a_3}$ - к концу вектора $\overrightarrow{a_2}$ и т.д.; тогда сумма *n* векторов будет представлять собой вектор, идущий из начала вектора $\overrightarrow{a_1}$ в конец вектора $\overrightarrow{a_n}$ (*«правило многоугольника»* или *«правило замыкающей»*).

1.4. Разность векторов

Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, для которого $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$ (рис. 2), где векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ приведены к общему началу.

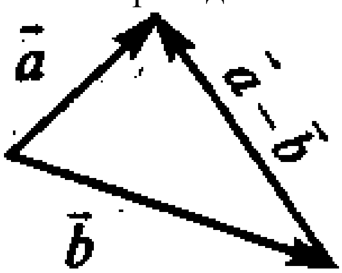

Рис. 2

Можно рассматривать разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как сумму вектора $\vec{a}$ и вектора $-\vec{b}$, противоположного вектору $\vec{b}$: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right)$.

Свойства векторов.

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ - коммутативность.

2) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.

3) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.
4) $\vec{a} + (-1)\vec{a} = \vec{0}$.
5) $(\alpha\cdot\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$ – ассоциативность.
6) $(\alpha+\beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ - дистрибутивность.
7) $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$.
8) $1\cdot\vec{a} = \vec{a}$.

1.5. Проекция вектора на ось

Углом φ между осью l (направленной прямой) и вектором $\vec{a}$ называется угол кратчайшего поворота оси до совмещения ее направления с направлением вектора (аналогично определяется угол между двумя векторами). Очевидно, этот угол φ заключен между 0 и π (направление упомянутого поворота здесь не играет роли).

Проекция вектора $\vec{a}$ на ось находится по формуле

$$Пр_l\vec{a} = \left|\vec{a}\right|\cos\varphi.$$

(В случае тупого угла φ между вектором и осью проекция оказывается отрицательной). Отметим следующие свойства проекции:

С в о й с т в о 1 . При умножении вектора $\vec{a}$ на число λ его проекция на ось также умножается на это число, т.е.

$$Пр_l\left(\lambda\vec{a}\right) = \lambda\cdot Пр_l\vec{a}.$$

С в о й с т в о 2 . Проекция суммы нескольких векторов на одну и ту же ось равна сумме их проекций на эту ось, т.е.

$$Пр_l\left(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}\right) = Пр_l\vec{a} + Пр_l\vec{b} - Пр_l\vec{c}.$$

1.6. Базис. Разложение вектора по базису

Определение.

1) *Базисом в пространстве* называются любые 3 некомпланарных вектора, взятые в определенном порядке.

2) *Базисом на плоскости* называются любые 2 неколлинеарные векторы, взятые в определенном порядке.

3) *Базисом на прямой* называется любой ненулевой вектор.

Определение. Если $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ - базис в пространстве и $\vec{a} = \alpha\vec{e_1} + \beta\,\vec{e_2} + \gamma\,\vec{e_3}$, то числа α, β и γ - называются *компонентами или координатами* вектора $\vec{a}$ в этом базисе.

В связи с этим можно записать следующие с в о й с т в а :

- равные векторы имеют одинаковые координаты,

- при умножении вектора на число его компоненты тоже умножаются на это число,

$$\lambda\vec{a} = \lambda(\alpha\vec{e_1} + \beta\,\vec{e_2} + \gamma\,\vec{e_3}) = (\lambda\alpha)\vec{e_1} + (\lambda\beta)\,\vec{e_2} + (\lambda\gamma)\,\vec{e_3}\,.$$

- при сложении векторов складываются их соответствующие компоненты.

$$\vec{a} = \alpha_1\vec{e_1} + \alpha_2\vec{e_2} + \alpha_3\vec{e_3}\,; \qquad \vec{b} = \beta_1\vec{e_1} + \beta_2\vec{e_2} + \beta_3\vec{e_3}\,;$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (\alpha_1 + \beta_1)\vec{e_1} + (\alpha_2 + \beta_2)\vec{e_2} + (\alpha_3 + \beta_3)\vec{e_3}\,.$$

Пример 1. Найти координаты вектора $2\vec{a} - 3\vec{b}$, если $\vec{a} = \{-3,1,0\}$, $\vec{b} = \{1,-4,2\}$.

Решение. Находим $2\vec{a} = \{-6,2,0\}$, $3\vec{b} = \{3,-12,6\}$, поэтому $2\vec{a} - 3\vec{b} = \{-6-3,\ 2-(-12),\ 0-6\} = \{-9,14,-6\}$.

1.7. Линейная зависимость векторов

Определение. Векторы $\vec{a_1},...,\vec{a_n}$ называются *линейно зависимыми*, если существует такая линейная комбинация $\alpha_1\vec{a_1} + \alpha_2\vec{a_2} + ... + \alpha_n\vec{a_n} = 0$, при не равных нулю одновременно α_i, т.е. $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + ... + \alpha_n^2 \neq 0$.

Если же только при $\alpha_i = 0$ выполняется $\alpha_1\vec{a_1} + \alpha_2\vec{a_2} + ... + \alpha_n\vec{a_n} = 0$, то векторы называются линейно независимыми.

Свойство 1. Если среди векторов $\vec{a_i}$ есть нулевой вектор, то эти векторы линейно зависимы.

Свойство 2. Если к системе линейно зависимых векторов добавить один или несколько векторов, то полученная система тоже будет линейно зависима.

Свойство 3. Система векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда один из векторов раскладывается в линейную комбинацию остальных векторов.

Свойство 4. Любые 2 коллинеарных вектора линейно зависимы, и, наоборот, любые 2 линейно зависимые векторы коллинеарны.

Свойство 5. Любые 3 компланарных вектора линейно зависимы, и, наоборот, любые 3 линейно зависимые векторы компланарны.

Свойство 6. Любые 4 вектора линейно зависимы.

1.8. Коллинеарность векторов

Выясним условия коллинеарности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, заданных своими координатами.

Пусть $\vec{a}=\left\{a_x,\ a_y,\ a_z\right\}$ и $\vec{b}=\left\{b_x,\ b_y,\ b_z\right\}$. Так как $\vec{a}\parallel\vec{b}$, то можно записать $\vec{a}=\lambda\cdot\vec{b}$, или

$$\left(a_x;a_y;a_z\right)=\lambda\cdot\left(b_x,b_y,b_z\right).$$

Отсюда $a_x=\lambda\cdot b_x$, $a_y=\lambda\cdot b_y$, $a_z=\lambda\cdot b_z$, т.е. $\dfrac{a_x}{b_x}=\lambda$, $\dfrac{a_y}{b_y}=\lambda$, $\dfrac{a_z}{b_z}=\lambda$, или $\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{z_1}{z_2}$.

Таким образом, *координаты коллинеарных векторов пропорциональны*. Верно и обратное утверждение: векторы, имеющие пропорциональные координаты, коллинеарны.

Пример 2. Определить, при каких значениях α и β векторы $\vec{a}=2\vec{i}+\alpha\vec{j}+\vec{k}$ и $\vec{b}=3\vec{i}+6\vec{j}+\beta\vec{k}$ коллинеарны.

Решение. Координаты векторов $\vec{a}=\left\{2,\alpha,1\right\}$ и $\vec{b}=\left\{3,-6,\beta\right\}$ должны быть пропорциональны $\dfrac{3}{2}=\dfrac{-6}{\alpha}=\dfrac{\beta}{1}$. Отсюда находим α и β.

$$\frac{3}{2}=-\frac{6}{\alpha},\qquad\qquad \frac{3}{2}=\frac{\beta}{1},$$

$$3\alpha=-12,\qquad\qquad 2\beta=3,$$

$$\alpha=-4.\qquad\qquad \beta=\frac{3}{2}.$$

При $\alpha=-4$ и $\beta=\dfrac{3}{2}$ векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

2. СИСТЕМА КООРДИНАТ

Для определения положения произвольной точки могут использоваться различные системы координат. Положение произвольной точки в какой- либо системе координат должно однозначно определяться. Понятие системы координат представляет собой совокупность точки начала отсчета (начала координат) и некоторого базиса. Как на плоскости, так и в пространстве возможно задание самых разнообразных систем координат. Выбор системы координат зависит от характера поставленной геометрической, физической или технической задачи.

2.1. Декартова система координат

Зафиксируем в пространстве точку O и рассмотрим произвольную точку M.

Вектор $\overrightarrow{OM}$ назовем радиусом-вектором точки M. Если в пространстве задать некоторый базис, то точке M можно сопоставить некоторую тройку чисел – компоненты ее радиуса-вектора.

Определение. *Декартовой системой координат* в пространстве называется совокупность точки и базиса. Точка называется *началом координат*. Прямые, проходящие через начало координат, называются *осями координат* (рис. 3).

1-я ось – ось *абсцисс*.

2-я ось – ось *ординат*.

3-я ось – ось *аппликат*.

Определение. Базис называется *ортонормированным*, если его векторы попарно ортогональны и равны единице.

Определение. Декартова система координат, базис которой ортонормирован, называется *декартовой прямоугольной системой координат*.

Обозначим через $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ единичные векторы (или *орты*) осей декартовой прямоугольной системы координат $Oxyz$. Любой вектор $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$ пространства единственным образом представляется в виде такой *линейной комбинации* векторов $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ (рис.3):

$$\vec{a} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}.$$

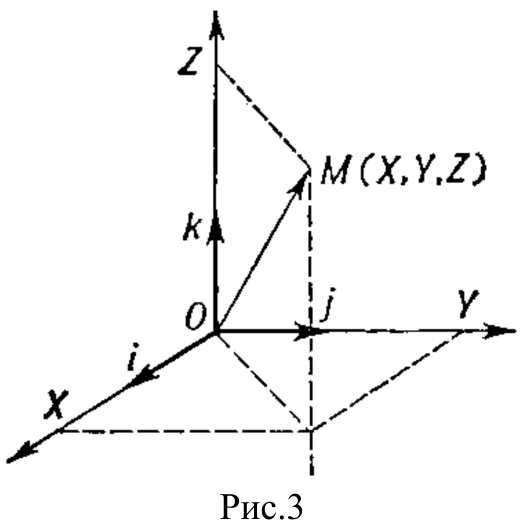

Рис.3

Пример 3. Даны векторы $\vec{a}$ (1; 2; 3), $\vec{b}$ (-1; 0; 3), $\vec{c}$ (2; 1; -1) и $\vec{d}$ (3; 2; 2) в некотором базисе. Показать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

Векторы образуют базис, если они линейно независимы, другими словами, если уравнения, входящие в систему:

$$\begin{cases} \alpha - \beta + 2\gamma = 0, \\ 2\alpha + 0\cdot\beta + \gamma = 0, \\ 3\alpha + 3\beta - \gamma = 0 \end{cases}$$

линейно независимы.

Тогда $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$.

Это условие выполняется, если определитель матрицы системы отличен от нуля.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -3 + (-2-3) + 12 = 4 \neq 0.$$

$$\begin{cases} \alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1 = d_1, \\ \alpha a_2 + \beta b_2 + \gamma c_2 = d_2, \\ \alpha a_3 + \beta b_3 + \gamma c_3 = d_3. \end{cases}$$

Для решения этой системы воспользуемся методом Крамера.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3(-3) + (-2-2) + 12 = -1.$$

$$\alpha = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -1/4;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-2-2) - 3(-2-3) + 2(4-6) = -4 + 15 - 4 = 7;$$

$$\beta = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 7/4;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -6 + (4-6) + 18 = 10; \quad \gamma = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 5/2.$$

Итого, координаты вектора $\vec{d}$ в базисе $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$: $\vec{d}$ { -1/4, 7/4, 5/2}.

Пример 4. Разложить вектор $\vec{a}$ по векторам $\vec{b}$ и $\vec{c}$, если $\vec{a}=-\vec{i}+3\vec{j}$, $\vec{b}=2\vec{i}-7\vec{j}$, $\vec{c}=\overrightarrow{AB}$, где $A(-1; 7)$, $B(0; 5)$.

Решение. Нужно найти α и β такие, что $\vec{a}=\alpha\vec{b}+\beta\vec{c}$.

Вектор $\vec{c}=\{x_B-x_A;\ y_B-y_A\}=\{0-(-1);\ 5-7\}=\{1;-2\}$. Таким образом, $(-1;3)=\alpha\cdot(2;-7)+\beta(1;-2)$.

Отсюда $\begin{cases}-1=2\alpha+\beta,\\ 3=-7\alpha-2\beta.\end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{matrix}\beta=-2\alpha-1,\\ 3=-7\alpha-2(-2\alpha-1).\end{matrix}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases}\beta=-2\alpha-1,\\ \alpha=-\dfrac{1}{3}.\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}\alpha=-\dfrac{1}{3},\\ \beta=-\dfrac{1}{3}.\end{cases}$

Итак, $\vec{a}=-\dfrac{1}{3}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$.

Пример 5. На плоскости *оху* даны векторы $\vec{a}=(4;2)$, $\vec{b}=(2;3)$ и $\vec{c}=(0;5)$. Разложить аналитически и геометрически вектор $\vec{a}$ по векторам $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Решение. На плоскости построим векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ с началом в точке *O* (см. рис. 4).

Строим параллелограмм со сторонами, параллельными векторам $\vec{b}$ и $\vec{c}$, так, чтобы вектор $\vec{a}$ являлся его диагональю. Вектор $\vec{a}$ является суммой векторов $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$, получаемых из $\vec{b}$ и $\vec{c}$ умножением на действительные числа λ_1, λ_2. Причем $\lambda_1>0$, а $\lambda_2<0$. Таким образом: $\vec{a}=\lambda_1\vec{b}+\lambda_2\vec{c}$.

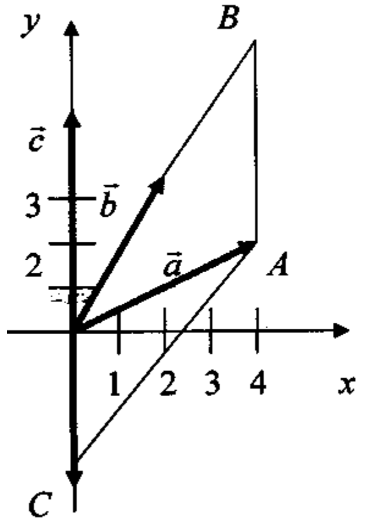

Рис. 4

Аналитическое решение заключается в нахождении λ_1 и λ_2 по известным координатам векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

$$(4;2)=\lambda_1\cdot(2;3)+\lambda_2(0;5).$$

Отсюда $\begin{cases}4=2\lambda_1+0\lambda_2,\\ 2=3\lambda_1+5\lambda_2.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2\lambda_1=4,\\ 3\lambda_1+5\lambda_2=2.\end{cases}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1=2,\\ 6+5\lambda_2=2.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1=2,\\ \lambda_2=-\dfrac{4}{5}.\end{cases}$$

Следовательно,

$$\vec{a}=2\vec{b}-0{,}8\vec{c}.$$

2.2. Деление отрезка в данном отношении

Если точка $M(x, y, z)$ *делит отрезок AB в соотношении* λ/μ, считая от A, то координаты этой точки определяются как:

$$x=\frac{\mu x_1+\lambda x_2}{\mu+\lambda};\quad y=\frac{\mu y_1+\lambda y_2}{\mu+\lambda};\quad z=\frac{\mu z_1+\lambda z_2}{\mu+\lambda}.$$

В частном случае координаты *середины отрезка* находятся как:

$$x=(x_1+x_2)/2;\qquad y=(y_1+y_2)/2;\qquad z=(z_1+z_2)/2.$$

2.3. Определение координат вектора по координатам его начала и конца

Если даны начало вектора $A(x_1,\ y_1,\ z_1)$ и его конец $B(x_2,\ y_2,\ z_2)$, то имеем

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}+(z_2-z_1)\vec{k}\text{, или}$$

$$\overrightarrow{AB}=\{x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1\}.$$

В частном случае, когда начало вектора $\overrightarrow{OB}$ находится в начале координат, имеем $\overrightarrow{OB}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}=\{x_2,y_2,z_2\}$, т.е. в этом случае координаты вектора совпадают с координатами конца вектора.

Модуль вектора $\overrightarrow{AB}$ (как и длина отрезка AB) находится по формуле

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

В частности, модуль вектора $\overrightarrow{OB}$ с началом в точке O равен $\left|\overrightarrow{OB}\right|=\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}$.

Пример 6. Пусть начало вектора расположено в точке A(-3,1,5), а конец – в точке B(-2,0,4). Тогда вектор $\overrightarrow{AB}=\{-2-(-3),\ \ 0-1,\ \ 4-5\}=\{1,\ \ -1,\ \ -1\}$ или же $\overrightarrow{AB}=\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$, а модуль этого вектора $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{3}$; радиус-вектор точки B равен $\overrightarrow{OB}=\{-2,0,4\}=-2\vec{i}+4\vec{k}$, а $\left|\overrightarrow{OB}\right|=\sqrt{(-2)^2+4^2}=\sqrt{20}$.

2.4. Направляющие косинусы вектора

Обозначим через $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ углы, образованные вектором $\vec{a}=\left\{a_x,\ a_y,\ a_z\right\}$ с осями координат *Ox, Oy, Oz* соответственно. Тогда числа $\cos\alpha,\ \ \cos\beta,\ \ \cos\gamma$ называются *направляющими косинусами* вектора $\vec{a}$. Очевидно,

$$a_x=|\vec{a}|\cos\alpha,\ \ a_y=|\vec{a}|\cos\beta,\ \ a_z=|\vec{a}|\cos\gamma;$$

Или, что то же самое, $\cos\alpha=\dfrac{a_x}{|\vec{a}|},\ \ \cos\beta=\dfrac{a_y}{|\vec{a}|},\ \ \cos\gamma=\dfrac{a_z}{|\vec{a}|}$.

Координатами произвольного *единичного* вектора $\vec{e}$ служат его направляющие косинусы:

$$\vec{e}=\left\{\cos\alpha,\ \ \cos\beta,\ \ \cos\gamma\right\}.$$

Направляющие косинусы связаны соотношением

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

Пример 7. Даны точки A(1;2;3) и B(3;-4;6). Найти направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{AB}$.

Решение. Найдем координаты вектора $\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AB}=\{3-1;-4-2;6-3\}=\{2;-6;3\}$. $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{2^2+(-6)^2+3^2}=\sqrt{49}=7$.

Тогда $\cos\alpha=\dfrac{x}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\dfrac{2}{7}$; $\cos\beta=\dfrac{y}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\dfrac{-6}{7}$; $\cos\gamma=\dfrac{z}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\dfrac{3}{7}$.

3. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

3.1. Определение

Определение. *Скалярным произведением* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих сторон на косинус угла между ними:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\ =\ |\,\vec{a}\,|\,|\,\vec{b}\,|\cos\varphi.$$

Отсюда следует, что скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равно либо произведению $|\vec{a}|$ на проекцию вектора $\vec{b}$ на ось вектора $\vec{a}$, либо произведению $\left|\vec{b}\right|$ на проекцию вектора $\vec{a}$ на ось вектора $\vec{b}$ (рис. 5):

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot Пр_{\vec{a}}\vec{b}=\left|\vec{b}\right|\cdot Пр_{\vec{b}}\vec{a}. \qquad (3.1)$$

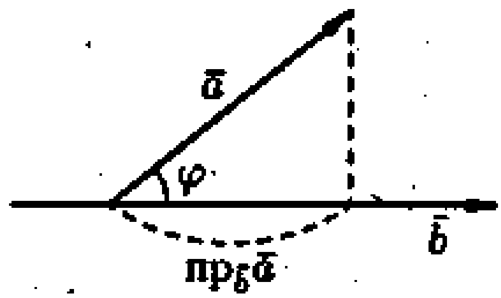

Рис. 5

Если $\vec a$ и $\vec b$ - нулевые векторы, то при остром угле φ между ними скалярное произведение положительно, а при тупом угле – отрицательно.

С в о й с т в а скалярного произведения:

1) $\vec a \cdot \vec b = 0$, если $\vec a \perp \vec b$, или $\vec a = 0$, или $\vec b = 0$;
2) $\vec a \cdot \vec b = \vec b \cdot \vec a$;
3) $\vec a \cdot (\vec b + \vec c) = \vec a \cdot \vec b + \vec a \cdot \vec c$;
4) $(m\vec a)\cdot \vec b = \vec a \cdot (m\vec b) = m(\vec a \cdot \vec b)$; m=const.

3.2. Физический смысл скалярного произведения

Допустим, что вектор $\vec a$ изображает силу, точка приложения которой перемещается из начала в конец вектора $\vec b$. Тогда работа этой силы равна $|\vec a|\cdot|\vec b|\cos\varphi$ (где φ - угол между направлениями силы перемещения), т.е. *работа равна скалярному произведению векторов* $\vec a$ и $\vec b$.

3.3. Скалярный квадрат вектора

Рассмотрим скалярное произведение $\vec a \cdot \vec a$. Оно называется *скалярным квадратом* вектора $\vec a$ и обозначается $\vec a^2$. Имеем

$$\vec a^2 = \vec a \cdot \vec a = |\vec a|\cdot|\vec a|\cos 0 = |\vec a|^2. \qquad (3.2)$$

Таким образом, скалярный квадрат вектора – неотрицательное число (равное квадрату модуля вектора). В частности, для ортов осей декартовой системы координат имеем $\vec i^2 = \vec j^2 = \vec k^2 = 1$ $\left(\text{а } \vec i \cdot \vec j = \vec j \cdot \vec k = \vec k \cdot \vec i = 0\right)$.

Т.к. $\vec a^2 = |\vec a|^2$, следовательно, $|\vec a| = \sqrt{\vec a^2}$.

Если в декартовой прямоугольной системе координат заданы векторы $\vec a = \{a_x,\ a_y,\ a_z\}$ и $\vec b = \{b_x,\ b_y,\ b_z\}$, то $\vec a \cdot \vec b = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$. (3.3)

Используя полученные равенства, получаем формулу для вычисления угла между векторами:

$$\cos\varphi = \frac{\vec a \cdot \vec b}{|\vec a||\vec b|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \qquad (3.4)$$

3.4. Нахождение проекции одного вектора на направление другого

Проекция вектора $\vec{a}$ на направление вектора $\vec{b}$ находится по формуле (3.4) $Пр_b\vec{a} = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$, а проекция $\vec{b}$ на направление $\vec{a}$ - по формуле (3.4) $Пр_a\vec{b} = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}$.

Пример 8. Найти $(5\vec{a} + 3\vec{b})(2\vec{a} - \vec{b})$, если $|\vec{a}| = 2,\quad |\vec{b}| = 3,\quad \vec{a}\perp\vec{b}.$

$$10\vec{a}\cdot\vec{a} - 5\vec{a}\cdot\vec{b} + 6\vec{a}\cdot\vec{b} - 3\vec{b}\cdot\vec{b} = 10|\vec{a}|^2 - 3|\vec{b}|^2 = 40 - 27 = 13, \text{ т.к.}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2 = 4,\quad \vec{b}\cdot\vec{b} = |\vec{b}|^2 = 9,\quad \vec{a}\cdot\vec{b} = 0.$$

Пример 9. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 6\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$.

Т.е. $\vec{a}$ = (1, 2, 3), $\vec{b}$ = (6, 4, -2)

$\vec{a}\cdot\vec{b}$ = 6 + 8 – 6 = 8:

$|\vec{a}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14};\qquad |\vec{b}| = \sqrt{36+16+4} = \sqrt{56}$.

cosφ = $\dfrac{8}{\sqrt{14}\sqrt{56}} = \dfrac{8}{2\sqrt{14}\sqrt{14}} = \dfrac{4}{14} = \dfrac{2}{7};\qquad \varphi = \arccos\dfrac{2}{7}.$

Пример 10. Найти скалярное произведение $(3\vec{a} - 2\vec{b})\cdot(5\vec{a} - 6\vec{b})$, если $|\vec{a}| = 4,\quad |\vec{b}| = 6,\quad \vec{a}\wedge\vec{b} = \pi/3.$

$$15\vec{a}\cdot\vec{a} - 18\vec{a}\cdot\vec{b} - 10\vec{a}\cdot\vec{b} + 12\vec{b}\cdot\vec{b} = 15|\vec{a}|^2 - 28|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{3} + 12|\vec{b}|^2 = 15\cdot 16 - 28\cdot 4\cdot 6\cdot\frac{1}{2} +$$

$$+ 12\cdot 36 = 240 - 336 + 432 = 672 - 336 = 336.$$

Пример 11. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$.

Т.е. $\vec{a}$ = (3, 4, 5), $\vec{b}$ = (4, 5, -3),

$\vec{a}\cdot\vec{b}$ = 12 + 20 - 15 =17:

$|\vec{a}| = \sqrt{9+16+25} = \sqrt{50};\qquad |\vec{b}| = \sqrt{16+25+9} = \sqrt{50}$.

cosφ = $\dfrac{17}{\sqrt{50}\sqrt{50}} = \dfrac{17}{50};\qquad \varphi = \arccos\dfrac{17}{50}.$

Пример 12. При каком m векторы $\vec{a} = m\vec{i} + \vec{j}$ и $\vec{b} = 3\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}$ перпендикулярны?

$$\vec{a} = (m, 1, 0);\qquad \vec{b} = (3, -3, -4).$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 3m - 3 = 0;\quad \Rightarrow m = 1.$$

Пример 13. Найти скалярное произведение векторов $2\vec{a}+3\vec{b}+4\vec{c}$ и $5\vec{a}+6\vec{b}+7\vec{c}$, если $|\vec{a}|=1,\quad |\vec{b}|=2,\quad |\vec{c}|=3,\quad \vec{a}\wedge\vec{b}=\vec{a}\wedge\vec{c}=\vec{b}\wedge\vec{c}=\dfrac{\pi}{3}.$

$(2\vec{a}+3\vec{b}+4\vec{c})(5\vec{a}+6\vec{b}+7\vec{c}) = 10\vec{a}\cdot\vec{a}+12\vec{a}\cdot\vec{b}+14\vec{a}\cdot\vec{c}+15\vec{a}\cdot\vec{b}+18\vec{b}\cdot\vec{b}+21\vec{b}\cdot\vec{c}+$ $+20\vec{c}\cdot\vec{a}+24\vec{b}\cdot\vec{c}+28\vec{c}\cdot\vec{c}=10\,\vec{a}\cdot\vec{a}+27\vec{a}\cdot\vec{b}+34\vec{a}\cdot\vec{c}+45\vec{b}\cdot\vec{c}+18\vec{b}\cdot\vec{b}+28\vec{c}\cdot\vec{c}$ = 10 + + 27 + 51 + 135 + 72 + 252 = 547.

Пример 14. В треугольнике ABC с вершинами A(1,0,-1), B(2,-1,-5), C(3,-2,4) найти проекцию стороны AB на сторону AC.

Решение. Находим векторы:

$\overrightarrow{AB}=\{2-1,-1-0,-5-(-1)\}=\{1,-1,-4\}$, $\quad \overrightarrow{AC}=\{3-1,-2-0,4-(-1)\}=\{2,-2,5\}$.

Искомая проекция равна:

$$\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{1\cdot 2+(-1)\cdot(-2)-4\cdot 5}{\sqrt{2^2+(-2)^2+5^2}}=\frac{-16}{\sqrt{33}}.$$

(отрицательный знак проекции свидетельствует о том, что $\angle BAC$ - тупой).

Пример 15. Найти длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если угол между векторами равен 60^0 и $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$.

Решение. Одна из диагоналей параллелограмма изображается вектором $\vec{a}+\vec{b}$, а другая вектором $\vec{a}-\vec{b}$.

Найдем скалярный квадрат

$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=3^2+2\cdot 3\cdot 4\cos 60^0+4^2=37$. (Здесь мы воспользовались формулой (3.2)); аналогично $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2=3^2-2\cdot 3\cdot 4\cos 60^0+4^2=13$. Из формулы (3.2) следует, что $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2}=\sqrt{37}$; аналогично $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2}=\sqrt{13}$.

Ответ: длины диагоналей равны $\sqrt{37}$ и $\sqrt{13}$.

Пример 16. Треугольник задан вершинами $A(-2;3;4)$, $B(6;0;-1)$, $C(4;-1;2)$. Найти косинус внутреннего угла *А*, $Пр\overrightarrow{BC}$ и единичный вектор, направленный вдоль медианы *BM*.

Решение. $\quad \cos A=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}$, $\quad \overrightarrow{AB}=(8;-3;-5)$, $\quad \overrightarrow{AC}=(6;-4;-2)$, $\overrightarrow{BC}=(-2;-1;3)$. $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{64+9+25}=\sqrt{98}$, $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{36+16+4}=\sqrt{56}$.

Тогда $\cos A=\dfrac{8\cdot 6+(-3)(-4)+(-5)(-2)}{\sqrt{98}\cdot\sqrt{56}}=\dfrac{70}{7\cdot\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{14}}=\dfrac{5}{\sqrt{28}}$,

$\cos A = \dfrac{5}{\sqrt{28}}$.

$$Пр_{\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{BC} = \frac{\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{6\cdot(-2)+(-4)(-1)+(-2)\cdot 3}{\sqrt{56}} = \frac{-14}{\sqrt{56}} = \frac{-7}{\sqrt{14}}.$$

Находим координаты точки *M*:

$x_M = \dfrac{x_A + x_C}{2} = 1,\ y_M = \dfrac{y_A + y_C}{2} = 1,\ z_M = \dfrac{z_A + z_C}{2} = 3$. Тогда $\overrightarrow{BM} = (-5;1;4)$.

$$\overrightarrow{BM} = \vec{e}\cdot\left|\overrightarrow{BM}\right| \Rightarrow \vec{e} = \frac{\overrightarrow{BM}}{\left|\overrightarrow{BM}\right|}.$$

$$\left|\overrightarrow{BM}\right| = \sqrt{25+1+16} = \sqrt{42}$$

значит, единичный вектор $\vec{m}$, направленный вдоль медианы *BM*, имеет вид:

$$\vec{e} = \left(\frac{-5}{\sqrt{42}};\frac{1}{\sqrt{42}};\frac{4}{\sqrt{42}}\right).$$

Пример 17. Найти вектор $\vec{x} = (x_1;x_2;x_3)$, удовлетворяющий условиям: $\vec{x}\cdot\vec{a} = -10$, $\vec{x}\cdot\vec{b} = 3$, $\vec{x}\cdot\vec{c} = 15$, где $\vec{a} = (2;-3;1)$, $\vec{b} = (3;1;-2)$, $\vec{c} = (-1;3;-4)$.

Решение. Трижды использовав определение скалярного произведения, имеем:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -10, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 3, \\ -x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 15. \end{cases}$$

Решая эту систему любым методом, получаем $x_1 = -1,\ x_2 = 2,\ x_3 = -2$.

Ответ: $\vec{x} = (-1;2;-2)$.

4. ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

4.1.Определение

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, который мы будем обозначать символом $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$ и который определяется следующими тремя условиями:

1) модуль вектора $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$ равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (если они приведены к общему началу), т.е. $|\vec{c}| = |\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\sin\varphi$, где φ - угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

2) вектор $\vec{c}$ перпендикулярен к $\vec{a}$ и к $\vec{b}$, т.е. $\vec{c}\perp a$ и $\vec{c}\perp b$;

3) вектор $\vec{c}$ относительно векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ направлен так же, как ось *OZ* направлена относительно осей *Ox* и *Oy* (рис. 6).

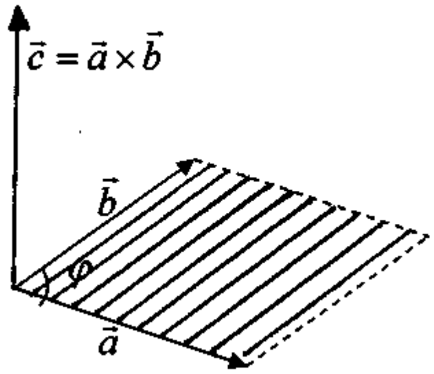

Рис. 6

Последнее условие выражают и по-другому: если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{a} \times \vec{b}$ приведены к общему началу, то вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ должен быть направлен так, чтобы из его конца кратчайший поворот вектора $\vec{a}$ к $\vec{b}$ был виден происходящим в ту же сторону, в какую виден поворот полуоси *Oz*. Если система координат правая, то тот поворот происходит *против часовой стрелки.*

Можно выразить это условие и такими словами: векторы-сомножители $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и векторное произведение $\vec{a} \times \vec{b}$ образуют *правую тройку векторов*, т.е. эти три вектора (приведенные к общему началу) располагаются в порядке нумерации аналогично большому, указательному и среднему пальцам правой руки («правило правой руки» или «правого винта (буравчика)»).

4.2. Физический смысл векторного произведения $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$

Если вектор $\vec{b}$ трактовать как силу $\vec{F}$, приложенную к некоторой точке *M* пространства, а вектор $\vec{a}$ - как радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$ точки *M*, то *момент силы* $\vec{F}$ *относительно точки O* равен векторному произведению $\overrightarrow{OM} \times \vec{F}$.

4.3. Свойства векторного произведения

1) $\vec{a} \times \vec{b} = -\left(\vec{b} \times \vec{a}\right)$, т.е. векторное произведение не обладает свойством коммутативности;

2) $\vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ (свойство дистрибутивности относительно сложения);

3) $\lambda\vec{a} \times \vec{b} = \lambda\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$ (где λ - скаляр).

Отсюда можно сделать вывод, что при перемножении векторных многочленов можно поступать так же, как при перемножении обычных многочленов. Однако следует помнить, что (в отличие от скалярного произведения) порядок векторных сомножителей является существенным, как следует из свойства 1.

В качестве примеров нахождения векторного произведения непосредственно по определению можно получить следующие векторные произведения ортов осей координат:

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j},$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}.$$

Из определения векторного произведения вытекает, что если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то их векторное произведение равно нулю. Например,

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{0}, \quad \vec{j} \times \vec{j} = \vec{0}, \quad \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}.$$

Верно и обратное: если $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, то $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

Замечание. Так как $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$, *то понятие векторного квадрата вектора не употребляется.*

4.4. Выражение векторного произведения через координаты сомножителей

Если в декартовой прямоугольной системе координат заданы векторы

$$\vec{a} = \left\{a_x,\ a_y,\ a_z\right\} \text{ и } \vec{b} = \left\{b_x,\ b_y,\ b_z\right\},$$

то

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(a_y b_z - a_z b_y\right)\vec{i} + \left(a_z b_x - a_x b_z\right)\vec{j} + \\ + \left(a_x b_y - a_y b_x\right)\vec{k}.$$

Для облегчения запоминания этой формуле обычно придают такой вид:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \qquad (4.1)$$

4.5. Нахождение площади параллелограмма и треугольника

Согласно определению векторного произведения

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \sin\varphi, \text{ т.е. } S_{пар.} = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|, \text{ значит, } S_{\Delta} = \frac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|. \qquad (4.2)$$

Пример 18. Найти векторное произведение векторов $\vec{a} = 2\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$.

$\vec{a}$ = (2, 5, 1); $\vec{b}$ = (1, 2, -3)

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -17\vec{i} + 7\vec{j} - \vec{k}.$$

Пример 19. Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(2, 2, 2)$, $B(4, 0, 3)$, $C(0, 1, 0)$.

$$\overrightarrow{AC} = (0-2; 1-2; 0-2) = (-2; -1; -2).$$

$$\overrightarrow{AB} = (4-2; 0-2; 3-2) = (2; -2; 1).$$

$$\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i}(-1-4) - \vec{j}(-2+4) +$$

$$+ \vec{k}(4+2) = -5\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}.$$

$$\left|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{25+4+36} = \sqrt{65}. \qquad S_\Delta = \frac{\sqrt{65}}{2} \text{ (ед}^2\text{)}.$$

Пример 20. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} + 3\vec{b}$; $3\vec{a} + \vec{b}$, если $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$; $\vec{a} \,\hat{}\, \vec{b} = 30^0$.

$$(\vec{a} + 3\vec{b}) \times (3\vec{a} + \vec{b}) = 3\vec{a} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b} + 9\vec{b} \times \vec{a} + 3\vec{b} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} + 9\vec{b} \times \vec{a} = 8\vec{b} \times \vec{a}.$$

$$S = 8|\vec{b}||\vec{a}|\sin 30^0 = 4 \text{ (ед}^2\text{)}.$$

Пример 21.Найти координаты единичного вектора, перпендикулярного векторам $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$.

Решение. Найдем векторное произведение

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \vec{i} + 2 \cdot \vec{j} + 5 \cdot \vec{k}.$$

Полученный вектор, согласно определению векторного произведения, перпендикулярен заданным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, но его длина равна не единице, а $\sqrt{1^2 + 2^2 + 5^2} = \sqrt{30}$. Единичный же вектор получится, если все координаты найденного вектора разделить на его длину.

$$\vec{e} = \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \frac{1 \cdot \vec{i} + 2 \cdot \vec{j} + 5 \cdot \vec{k}}{\sqrt{30}} = \frac{1}{\sqrt{30}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{30}}\vec{j} + \frac{5}{\sqrt{30}}\vec{k}.$$

Ответ: $\left\{\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}}\right\}$ (можно также взять вектор, противоположный найденному).

Пример 22. Даны векторы $\vec{a} = (3; -2; 4)$ и $\vec{b}(1; 3; -1)$. Найти $\alpha = \left|\left(2\vec{a} - \vec{b}\right) \times \left(4\vec{a} + 5\vec{b}\right)\right|$.

Решение.

$$\alpha = \left|\left(2\vec{a} - \vec{b}\right) \times \left(4\vec{a} + 5\vec{b}\right)\right| = \left|8\left(\vec{a} \times \vec{a}\right) + 10\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) - 4\left(\vec{b} \times \vec{a}\right) - 5\left(\vec{b} \times \vec{b}\right)\right| =$$

$$=\left|\vec{0}+10\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)+4\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)-\vec{0}\right|=\left|14\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\right|=14\cdot\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|.$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -2 & 4\\ 1 & 3 & -1\end{vmatrix}=-10\vec{i}+7\vec{j}+11\vec{k};\ \alpha=14\cdot\sqrt{100+49+121}=14\sqrt{270}.$$

5.СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

5.1.Определение

Смешанным произведение векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ называется *число* $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$. Здесь первые два вектора перемножаются векторно, а их результат скалярно на третий вектор.

Смешанное произведение представляет собой некоторое число. Обозначается $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$. $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\vec{b}\vec{c}$

Геометрический смысл смешанного произведения.

Смешанное произведение представляет собой число, абсолютная величина которого равна объему параллелепипеда, построенного на перемножаемых векторах (если эти векторы приведены к общему началу и некомпланарны (рис. 7).

$$V=\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|. \tag{5.1}$$

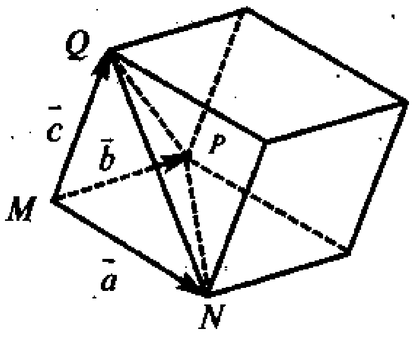

Рис. 7

Смешанное произведение положительно, если векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ образуют правую тройку, и отрицательно, если левую. Заметим, что объем пирамиды *MNPQ*, построенной на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, в шесть раз меньше объема упомянутого параллелепипеда.

$$V_{пир.}=\frac{1}{6}\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|. \tag{5.2}$$

5.2. Свойства смешанного произведения

1) Из геометрического смысла смешанного произведения следует, что $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$; это позволяет обозначать смешанное произведение символом $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ (не уточняя, где именно стоят квадратные скобки).

2) При перестановке любых двух сомножителей смешанное произведение меняет знак:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=-\vec{b}\vec{a}\vec{c},\ \ \vec{a}\vec{b}\vec{c}=-\vec{a}\vec{c}\vec{b},\ \ \vec{a}\vec{b}\vec{c}=-\vec{c}\vec{b}\vec{a}.$$

3) При *циклической* перестановке сомножителей (т.е. при перестановке согласно схеме $\vec{a}\to\vec{b}\to\vec{c}\to\vec{a}$) смешанное произведение не изменяется:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\vec{b}\vec{c}\vec{a}=\vec{c}\vec{a}\vec{b}.$$

4) Если в смешанном произведении два любых вектора равны или компланарны, то оно равно нулю. Действительно, это означает, что в определителе равны или пропорциональны две строки; следовательно, он равен нулю.

5.3. Необходимое и достаточное условие компланарности трех векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$

Необходимое и достаточное условие компланарности трех векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ состоит в равенстве нулю их смешанного произведения:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0 \qquad (5.3)$$

(или, иначе говоря, смешанное произведение трех векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы компланарны). Это вытекает из геометрического смысла смешанного произведения. При этом между $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ существует линейная зависимость вида $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$.

5.4. Выражение смешанного произведения через координаты перемножаемых векторов

Пусть $\vec{a}=\left\{a_x,\ a_y,\ a_z\right\}$, $\vec{b}=\left\{b_x,\ b_y,\ b_z\right\}$, $\vec{c}=\left\{c_x,\ c_y,\ c_z\right\}$. Тогда смешанное произведение равно определителю третьего порядка:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \qquad (5.4)$$

Пример 23. Доказать, что точки A(5;7;2), B(3;1;-1), C(9;4;-4), D(1;5;0) лежат в одной плоскости.

Найдем координаты векторов: $\overrightarrow{AB}=(-2;-6;1)$, $\overrightarrow{AC}=(4;-3;-2)$, $\overrightarrow{AD}=(-4;-2;2)$.

Найдем смешанное произведение полученных векторов:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}-2 & -6 & 1\\ 4 & -3 & -2\\ -4 & -2 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2 & -6 & 1\\ 0 & -15 & 0\\ 0 & 10 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & -6 & 1\\ 0 & -15 & 0\\ 0 & 10 & 0\end{vmatrix}=0.$$

Таким образом, полученные выше векторы компланарны, следовательно, точки A, B, C и D лежат в одной плоскости.

Пример 24. Найти объем пирамиды и длину высоты, опущенной на грань BCD, если вершины имеют координаты $A(0;\ 0;\ 1)$, $B(2;\ 3;\ 5)$, $C(6;\ 2;\ 3)$, $D(3;7;2)$.

Найдем координаты векторов: $\overrightarrow{BA}=(-2;-3;-4)$, $\overrightarrow{BD}=(1;4;-3)$, $\overrightarrow{BC}=(4;-1;-2)$.

Объем пирамиды:

$$V=\frac{1}{6}\cdot\begin{vmatrix}-2 & -3 & -4\\ 1 & 4 & -3\\ 4 & -1 & -2\end{vmatrix}=\frac{1}{6}(-2(-8-3)+3(-2+12)-4(-1-16))=$$

$$=\frac{1}{6}(22+30+68)=20(ед^3).$$

Для нахождения длины высоты пирамиды найдем сначала площадь основания BCD.

$$\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 4 & -3\\ 4 & -1 & -2\end{vmatrix}=\vec{i}(-8-3)-\vec{j}(-2+12)+\vec{k}(-1-16)=-11\vec{i}-10\vec{j}-17\vec{k}.$$

$\left|\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{11^2+10^2+17^2}=\sqrt{121+100+289}=\sqrt{510}$.

$S_{осн}=\sqrt{510}/2$ (ед^2).

Т.к. $V=\dfrac{S_{осн}\cdot h}{3}$; $\quad h=\dfrac{3V}{S_{осн}}=\dfrac{120}{\sqrt{510}}=\dfrac{4\sqrt{510}}{17}$.(ед).

Пример 25. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{b}=-\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{c}=\vec{i}+5\vec{j}-3\vec{k}$.

Решение. $V=\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|$. Найдем смешанное произведение данных векторов по формуле (5.4):

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix}2 & 3 & -1\\ -1 & 2 & 2\\ 1 & 5 & -3\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}2 & 2\\ 5 & -3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 1 & -3\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 1 & 5\end{vmatrix}=-28.$$

Отрицательный знак смешанного произведения свидетельствует о том, что векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ образуют левую тройку. Объем параллелепипеда равен $|-28|=28$. Ответ: 28 куб.ед.

Пример 26. Доказать, что векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, удовлетворяющие условию $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)+\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)+\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)=\vec{0}$, компланарны.

Решение. Умножив обе части данного векторного равенства скалярно на вектор $\vec{c}$, получим:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}+\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{c}+\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\cdot\vec{c}=\vec{0},$$

или, на языке смешанных произведений,

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}+\vec{b}\vec{c}\vec{c}+\vec{c}\vec{a}\vec{c}=0.$$

Второе и третье слагаемые в левой части равенства равны нулю на основании свойства 4) смешанного произведения. Остается равенство $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0$, которое и означает компланарность данных векторов.

6. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

6.1. Задачи

1. Даны векторы $\vec{a}=2\vec{m}+4\vec{n}$ и $\vec{b}=\vec{m}-\vec{n}$, где $\vec{m}$ и $\vec{n}$ - единичные векторы, образующие угол в 120^0. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
2. На плоскости *Oxy* построить векторы $\overrightarrow{OA}=\vec{a}=2\vec{i}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}=3\vec{i}+3\vec{j}$ и $\overrightarrow{OC}=\vec{c}=2\vec{i}+6\vec{j}$. Разложить геометрически и аналитически вектор $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
3. Даны четыре вектора: $\vec{a}=\left(2;1;0\right)$, $\vec{b}=\left(1;-1;2\right)$, $\vec{c}=\left(2;2;-1\right)$, $\vec{d}=\left(3;7;-7\right)$. Разложить вектор $\vec{a}$ по векторам $\vec{b},\vec{c},\vec{d}$.
4. Найти длину вектора $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-6\vec{k}$ и его направляющие косинусы.
5. Вектор составляет с осями *Oy* и *Oz* углы соответственно 60^0 и 120^0. Какой угол он составляет с осью *Ox*?
6. Даны точки $M_1(4;-2;6)$ и $M_2(1;4;0)$. Найти длину и направление вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$.
7. Даны векторы $\vec{a}=6\vec{i}-8\vec{j}+5\sqrt{2}\vec{k}$ и $\vec{b}=2\vec{i}-4\vec{j}+\sqrt{2}\vec{k}$. Найти угол, образуемый вектором $\vec{a}-\vec{b}$ с осью *Oz*.
8. При каком значении *m* векторы $\vec{a}=m\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$ и $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-m\vec{k}$ перпендикулярны?
9. Найти проекцию вектора $\vec{a}=3\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$ на вектор $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}+4\vec{k}$.
10. Даны векторы $\vec{a}=3\vec{i}-6\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+4\vec{j}-5\vec{k}$ и $\vec{c}=3\vec{i}+4\vec{j}+2\vec{k}$. Найти проекцию вектора $\vec{a}+\vec{c}$ на вектор $\vec{b}+\vec{c}$.
11. Найти вектор $\vec{d}$, перпендикулярный векторам $\vec{a}=\vec{i}+\vec{k}$ и $\vec{b}=2\vec{j}-\vec{k}$, если известно, что его проекция на вектор $\vec{c}=\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$ равна единице.
12. Вычислить внутренние углы ΔABC, если $A(1, 2, 1)$, $B(3, -1, 7)$, $C(7,4,-2)$.
13. Даны вершины четырехугольника $A(1, -2, 2)$, $B(1, 4, 0)$, $C(-4, 1, 1)$, $D(-5,-5,3)$. Докажите, что его диагонали $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$ взаимно ортогональны.

14. Определить, при каком α векторы $\vec{a} = \alpha\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \alpha\vec{k}$ ортогональны.

15. На векторах $\vec{a} = (3;1;-1)$ и $\vec{b} = (5;3;-3)$ построен параллелограмм. Записать единичные векторы, направленные вдоль его диагоналей.

16. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = (-4;1;2)$ и $\vec{b} = (5;-1;1)$.

17. Даны вершины пирамиды *A*(-4, -1, 2), *B*(-1, 0, 3), *C*(2, 2, 5), *D*(3,-2,-1). Найти площади всех граней.

18. Упростить $(\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}) \times \vec{i} + (2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}) \times \vec{i}$.

19. Вычислить смешанное произведение векторов $\vec{a} = (1;-1;2)$, $\vec{b} = (3;1;-1)$, $\vec{c} = (-2;4;2)$.

20. Установить, компланарны ли векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, если: $\vec{a} = (-2;1;-2)$, $\vec{b} = (3;1;3)$, $\vec{c} = (-1;3;-4)$.

21. Найти вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{a} = (4;2;4)$ и удовлетворяющий условию $\vec{x} \cdot \vec{a} = 180$.

22. Даны векторы $\vec{a} = (3;-1;5)$, $\vec{b} = (1;2;-3)$. Найти вектор $\vec{x}$, перпендикулярный к оси *Oz* и удовлетворяющий условиям $\vec{x} \cdot \vec{a} = 9$, $\vec{x} \cdot \vec{b} = -4$.

23. Вычислить длины диагоналей параллелограмма *ABCD*, если $\overrightarrow{AB} = 2\vec{a} - \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{a} + 3\vec{b}$, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) = \dfrac{\pi}{3}$.

24. Вычислить площадь параллелограмма *ABCD*, если $\overrightarrow{AB} = 2\vec{a} - \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{a} + 3\vec{b}$, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) = \dfrac{\pi}{3}$.

25. Вычислить угол между диагоналями параллелограмма *ABCD*, если $\overrightarrow{AB} = 2\vec{a} - \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{a} + 3\vec{b}$, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) = \dfrac{\pi}{3}$.

26. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогональны. Зная, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, вычислить:

а) $\left|(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})\right|$, б) $\left|(3\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + 2\vec{b})\right|$.

27. Доказать тождество $\left((\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{b} + \vec{c})\right) \cdot (\vec{c} + \vec{a}) = 2\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

ОТВЕТЫ

1. 120^0.
2. $\bar{c} = 2\bar{b} - 2\bar{a}$.
3. $\vec{a} = 3\vec{b} - \vec{c} + \vec{d}$.
4. $|\vec{a}| = 7$. $\left(\dfrac{2}{7}; \dfrac{3}{7}; \dfrac{-6}{7}\right)$.
5. 45^0 или 135^0.

6. 9.
7. 45^0.
8. -6.
9. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$.
10. $\frac{5}{\sqrt{89}}$.
11. $\vec{d}=\left(\frac{-3}{2};\frac{3}{4};\frac{3}{2}\right)$.
12. $A=\arccos\left(\frac{-12}{19}\right)$,
13. $B=\arccos\frac{61}{7\sqrt{122}}$,
14. $C=\arccos\frac{61}{7\sqrt{122}}$.
15. $\alpha=-6$.
16. $\left(\frac{2}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}};\frac{-1}{\sqrt{6}}\right)$, $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}};\frac{-1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.
17. $\sqrt{206}$.
18. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$; $\frac{3\sqrt{254}}{2}$; $3\sqrt{10}$; $\sqrt{153}$.
19. $-3k$.
20. 38.
21. нет.
22. (20; 10; 20).
23. (2; -3; 0).
24. $\sqrt{133}$; 7.
25. $21\sqrt{3}$.
26. $\varphi=\arccos\left(-\frac{5}{\sqrt{133}}\right)$.
27. а) 24; б) 84.

6.2. Контрольная работа

Вариант №1.

1. Даны три последовательные вершины параллелограмма: $A(1, -2, 3)$, $B(3, 2, 1)$, $C(6, 4, 4)$. Найти его четвертую вершину D.

2. Разложить вектор $\vec{c}(6;2)$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}=(1;2)$ и $\vec{b}=2\vec{i}-5\vec{j}$.

3. Найти вектор $\vec{d}$, зная, что $\vec{d}\perp\vec{a}$, $\vec{d}\perp\vec{b}$, где $\vec{a}=(2;3;-1)$, $\vec{b}=(1;-2;3)$ и $\vec{d}\cdot\left(2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}\right)=-6$.

4. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=3\vec{p}+\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}-2\vec{q}$, где $|\vec{p}|=4$, $|\vec{q}|=1$, $\left(\vec{p},\hat{\ }\vec{q}\right)=\frac{\pi}{4}$.

5. Дана пирамида с вершинами $A_1(7;2;4)$, $A_2(7;-1;-2)$, $A_3(3;3;1)$, $A_4(-4;2;1)$. Найти: а) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4; б) объем пирамиды; в) длину высоты, опущенной на грань $A_1A_2A_3$.

Вариант №2.

1. При каких значениях α и β векторы $\vec{a}=-2\vec{i}+3\vec{j}+\alpha\vec{k}$ и $\vec{b}=\beta\vec{i}-6\vec{j}+2\vec{k}$ коллинеарны?

2. На оси oy найти точку M, равноудаленную от точек $A(1;-4;7)$ и $B(5;6;-5)$.

3. Найти единичный вектор, перпендикулярный векторам $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ и $\vec{b}=(1;1;2)$.

4. Найти площадь треугольника ABC, в котором $A(2, 1, 0)$, $B(-2, 4, 1)$, $C(-3, -8, 4)$.

5. Дана пирамида с вершинами $A_1(1;3;6)$, $A_2(2;2;1)$, $A_3(-1;0;1)$, $A_4(-4;6;-3)$. Найти: а) $\cos\left(\overrightarrow{A_1A_2},\ \widehat{\ }\ \overrightarrow{A_1A_4}\right)$; б) объем пирамиды; в) длину высоты, опущенной на грань $A_1A_2A_3$.

Вариант №3.

1. Определить, при каком α векторы $\vec{a}=\alpha\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$ и $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-\alpha\vec{k}$ перпендикулярны.

2. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, и угол между ними равен 120^0. Найти длину вектора $\vec{c}=2\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}$, если $|\vec{a}|=3$; $|\vec{b}|=4$.

3. Даны векторы $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{b}=(1;-3;2)$, $\vec{c}=(3;2;-4)$. Найти вектор $\vec{x}$, если $\vec{x}\vec{a}=-5$; $\vec{x}\vec{b}=-11$; $\vec{x}\vec{c}=20$.

4. В треугольниках с вершинами $A(4, -14, 8)$, $B(2, -18, 12)$, $C(12, -8, 12)$ найти длину высоты, опущенной из вершины C на сторону AB.

5. Дана пирамида с вершинами в точках $A_1(-2;0;4)$, $A_2(-1;7;1)$, $A_3(4;-8;-4)$, $A_4(1;-4;6)$. Найти: а) длину ребра A_2A_3; б) косинус угла между ребрами A_1A_2 и A_1A_4; в) объем пирамиды.

Вариант №4.

1. Даны векторы $\vec{a}=(-2;3;4)$, $\vec{b}=(1;1;-2)$, $\vec{c}=(3;0;-1)$. Найти $Пр_{\vec{a}}\left(2\vec{b}-\vec{c}\right)$.

2. Установить, лежат ли в одной плоскости точки $A(1, 1, -2)$, $B(3, 0, 1)$, $C(-2, 1, 2)$, $D(5;4;-2)$.

3. Найти вектор $\vec{m}$, зная, что $\vec{m}\perp\vec{c}$, $\vec{m}\vec{a}=4$, $\vec{m}\vec{b}=35$, где $\vec{a}=(3;-2;4)$, $\vec{b}=(5;1;6)$, $\vec{c}=(-3;0;2)$.

4. Зная две стороны $\overrightarrow{AB}=(-3;-2;6)$, $\overrightarrow{BC}=(-2;4;4)$ треугольника ABC, вычислить длину высоты AD.

5. Дана пирамида с вершинами в точках $A_1(1;2;0)$, $A_2(3;0;-3)$, $A_3(5;2;6)$, $A_4(8;4;-9)$. Найти: а) длину ребра A_2A_3; б) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4; в) объем пирамиды.

Вариант №5.

1. Дан треугольник с вершинами в точках $A(-3, 1, -2)$, $B(1, 3, 2)$, $C(4,5,4)$. Найти площадь треугольника и длину высоты, опущенной из вершины C.

2. При каком значении λ векторы $\vec{a}=(4;\lambda;5)$ и $\vec{b}=\lambda\vec{i}+2\vec{j}-6\vec{k}$ взаимно перпендикулярны?

3. Даны векторы $\vec{a}=(5;1;-2)$ и $\vec{b}=(3;0;4)$. Найти $Пр_{\vec{a}}\vec{b}$, $Пр_{\vec{b}}\vec{a}$, $Пр_{\vec{a}}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$.

4. Установить, компланарны ли векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, если $\vec{a}=(2;3;1)$, $\vec{b}=(1;-1;3)$, $\vec{c}=(1;9;-11)$.

5. Дана пирамида с вершинами в точках $A_1(1;2;3)$, $A_2(-2;4;1)$, $A_3(7;6;3)$, $A_4(4;-3;1)$. Найти: а) длину ребер A_1A_2 и A_1A_3; б) угол между ребрами A_1A_4 и A_1A_3; в) объем пирамиды.

Вариант №6.

1. Даны векторы $\vec{a}=(3;-6;-1)$, $\vec{b}=(1;4;-5)$, $\vec{c}=(3;-4;12)$. Найти $Пр_{\vec{c}}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$.

2. В треугольнике ABC вершины имеют координаты $A(1,1,-1)$, $B(2,3,1)$, $C(3,2,1)$. Найти: а) длины сторон; б) внутренний угол A; в) острый угол между медианой BD и стороной AC.

3. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=(8;4;1)$ и $\vec{b}=(2;-2;1)$.

4. Стороны параллелограмма заданы векторами $\vec{a}=2\vec{m}+3\vec{n}$ и $\vec{b}=\vec{m}+4\vec{n}$, где $|\vec{m}|=4$, $|\vec{n}|=5$, $\left(\vec{m},\hat{\ }\vec{n}\right)=\dfrac{\pi}{3}$. Найти длину его меньшей диагонали.

5. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, построенный на векторах $\overrightarrow{AB}=(4;3;0)$, $\overrightarrow{AD}=(2;1;2)$ и $\overrightarrow{AA_1}=(-3;-2;5)$. Найти: а) объем параллелепипеда; б) длину высоты, проведенной из вершины A_1.

Вариант 7.

1. Дан параллелограмм $ABCD$. Точка M лежит на стороне CD. Найти сумму векторов: 1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$; 2) $\overrightarrow{DM}-\overrightarrow{AM}$; 3) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$.

2. Даны вершины треугольника $A(2, 3, -1)$, $B(4, 1, -2)$, $C(1, 0, 2)$. Найти: а) внутренний угол при вершине C; б) $Пр_{\overrightarrow{CA}}\overrightarrow{CB}$.

3. Найти длину вектора $\vec{a}=3\vec{m}+2\vec{n}$, если $|\vec{m}|=2$, $|\vec{n}|=1$, $\left(\vec{m},\hat{\ }\vec{n}\right)=\dfrac{\pi}{3}$.

4. Даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, для которых $|\vec{a}|=2$; $|\vec{b}|=6$, $\varphi=\left(\vec{a}, \hat{\ } \vec{b}\right)=\frac{5\pi}{6}$. Найти: $\left|\left(2\vec{a}+3\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}-4\vec{b}\right)\right|$.

5. Найти высоту параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}=(2;1;-3)$, $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{c}=(1;-3;1)$, опущенную на грань, построенную на векторах $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Вариант №8.

1. Даны три вектора $\vec{a}=(3;-1)$, $\vec{b}=(1;-2)$, $\vec{c}=(-1;7)$. Найти длину вектора $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$. Разложить вектор $\vec{p}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=-2\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}+\vec{j}$.

3. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=3\vec{p}+2\vec{q}$ и $\vec{b}=2\vec{p}-\vec{q}$, где $|\vec{p}|=4$, $|\vec{q}|=3$, $\left(\vec{p}, \hat{\ } \vec{q}\right)=\frac{3\pi}{4}$.

4. Найти площадь треугольника с вершинами $A(1, -2, 3)$, $B(0, -1, 2)$, $C(3,4,5)$.

5. Даны вершины пирамиды $O(-5, -4, 8)$, $A(2, 3, 1)$, $B(4, 1, -2)$, $C(6;3;7)$. Найти: а) объем пирамиды; б) длину высоты, опущенной на грань ABC из вершины O.

Вариант №9.

1. При каких значениях α и β векторы $\vec{a}=-2\vec{i}+3\vec{j}+\beta\vec{k}$ и $\vec{b}=\alpha\vec{i}-6\vec{j}+2\vec{k}$ коллинеарные?

2. На плоскости oxy построить векторы $\overrightarrow{OA}=\vec{a}=2\vec{i}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}=3\vec{i}+3\vec{j}$ и $\overrightarrow{OC}=\vec{c}=2\vec{i}+6\vec{j}$. Разложить геометрически и аналитически вектор $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

3. Найти длину вектора $\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}-6\vec{k}$ и его направляющие косинусы.

4. Даны векторы $\vec{a}=3\vec{k}-2\vec{j}$, $\vec{b}=3\vec{i}-2\vec{j}$ и $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$. Вычислить модуль вектора $\vec{c}$ и площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

5. Дана пирамида с вершинами $A(2, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$, $C(0, 0, 6)$ и $D(2;3;8)$, вычислить ее объем и высоту, опущенную на грань ABC.

Вариант №10.

1. Даны точки $A(2, 2, 0)$ и $B(0, -2, 5)$. Найти вектор $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ и определить его длину и направление.

2. Даны три последовательные вершины параллелограмма: A(-3, -2, 0), B(3, -3, 1) и C(5, 0, 2). Найти его четвертую вершину D и угол между векторами $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$.

3. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ составляют угол 45^0. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)$ и $\left(3\vec{a}+2\vec{b}\right)$, если $|\vec{a}|=|\vec{b}|=5$.

4. Показать, что точки A(3, -4, 1), B(2, -3, 7), C(1, -4, 3) и D(4,-3,5) лежат в одной плоскости.

5. Даны вершины пирамиды A(0,-2,5), B(6,6,0), C(3,-3,6) и D(2,-1,3). Найти длину высоты, опущенной из вершины D.

6.3. Тесты

1. Координаты вектора $\vec{a}\,(1,2,3)$. Какие векторы будут коллинеарны вектору $\vec{a}$:

1) $(1,4,-3)$,
2) $(2,4,-6)$,
3) $(-4,-8,12)$,
4) $(1,2,-5)$,
5) $(-1,-2,5)$.

2. Координаты вектора $\vec{a}\,(1, 2,3)$. Какие векторы будут сонаправлены вектору $\vec{a}$:

1) $(1,4,-3)$,
2) $(2,4,-6)$,
3) $(-4,-8,12)$,
4) $(1,2,-5)$,
5) $(-1,-2,5)$.

3. Координаты вектора $\vec{a}\,(1, 2,3)$. Какие векторы будут противоположно направлены вектору $\vec{a}$:

1) $(1,4,-3)$,
2) $(2,4,-6)$,
3) $(-4,-8,12)$,
4) $(1,2,-5)$,
5) $(-1,-2,5)$.

4. Координаты вектора $\vec{a}\,(1, 2,3)$. Какие векторы будут перпендикулярны вектору $\vec{a}$:

1) $(1,4,-3)$,
2) $(2,4,-6)$,
3) $(-4,-8,12)$,
4) $(1,2,-5)$,
5) $(-1,-2,5)$.

5. Координаты вектора $\vec{a}\,(1, 2,3)$. Какие векторы будут образовывать тупой угол с вектором $\vec{a}$:

1) $(1,4,-3)$,
2) $(2,4,-6)$,

3) $(-4,-8,12)$,
4) $(1,2,-5)$,
5) $(-1,-2,5)$.

6. Какие из перечисленных векторов образуют тупой угол с осью OZ:
1) $(1,4,-3)$,
2) $(2,4,-6)$,
3) $(-4,-8,12)$,
4) $(1,2,-5)$.
5) $(-1,-2,5)$.

7. Какие из перечисленных векторов образуют острый угол с осью OY:
1) $(1,4,-3)$,
2) $(2,4,-6)$,
3) $(-4,-8,12)$,
4) $(1,2,-5)$,
5) $(-1,-2,5)$.

8. Координаты векторов $\vec{a}(1,1,0)$ и $\vec{b}(2,3,1)$. Тогда координаты вектора $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$.
1) $(1,3,2)$,
2) $(4,-2,0)$,
3) $(2,5,3)$,
4) $(3,-2,1)$,
5) $(1,-1,1)$.

9. Координаты точек $A(1,-3,0)$ и $B(2,0,1)$. Тогда длина вектора AB равна:
1) 3,
2) 4,
3) 11,
4) 5,
5) 2.

10. Координаты вершин треугольника ABC: $A(1,1,0)$, $B(3,0,1)$ и $C(-2,3,-1)$. Тогда длина медианы, проведенной из вершины A:
1) 2 / 2,
2) 2,
3) 3,
4) 1,
5) 1/ 2.

11. Проекция вектора $\vec{a}(1,1,3)$ на вектор $\vec{b}(4,0,3)$ равна:
1) 2,6,
2) 11,
3) 2,4,
4) 13,
5) 1,8.

12. Координаты точек $A(2,3)$ и $B(-6,5)$. Тогда координаты середины отрезка AB:
1) (4;8),

2) (4;1),
3) (-2;4),
4) (2;8),
5) (4; 2).

13. Координаты точек $A(0,1)$ и $B(6,-3)$, где B – середина отрезка AC. Тогда координаты точки C:

1) $(12,-7)$,
2) $(3, -1)$,
3) $(12,7)$,
4) $(12, -6)$,
5) $(-2, 3)$.

14. Расстояние между точками $A(1, 2)$ и $B(k, -2)$ равно 5. Тогда k равно:

1) 1,
2) −2,
3) 10,
4) 4,
5) 3.

15. Векторы $\vec{a}(3,4,2)$ и $\vec{b}(l, 2,0.5)$ перпендикулярны при l, равном:

1) −1,
2) 3,
3) 1,
4) −3,
5) 2.

16. Вектор c коллинеарен вектору $\vec{a}(-4,1,3)$ и скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{c}$ равно 78. Тогда координаты вектора $\vec{c}$:

1) (12,3,9),
2) (-12,3,9),
3) (4, 1, 3),
4) (1, 0,1),
5) (9,3, 12).

17. Даны координаты векторов $\vec{a}(1,1,2)$, $\vec{b}(1,1,4)$. Тогда длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, равны:

1) 2 и 5,
2) 6 и 3 2,
3) 6 и 2,
4) 6 и 2 3,
5) 6 и 9.

18. Векторы $\overrightarrow{AB}(2,6,4)$ и $\overrightarrow{AC}(4,2,2)$ определяют стороны треугольника ABC. Тогда длина вектора CD, совпадающего с медианой треугольника, проведенной из вершины C, равна:

1) 4,
2) 14,
3) 10,
4) 9,

5) 14.

19. Даны две вершины параллелограмма: $A(2, -3, -5)$, $B(-1, 3, 2)$ и точка пересечения диагоналей $O(4,-1,7)$. Тогда координаты остальных его вершин:

1) (1,0,–3) и (3,–6,–7),

2) (4,4,24) и (10,–8,10),

3) (1,1,1) и (2,5,2),

4) (6,1,19) и (9,–5,12),

5) (1,1,6) и (9,5,–12).

20. Координаты концов отрезка AB, который точками $C(2,0,2)$, $D(5,-2,0)$ разделен на 3 равные части, равны:

1) (1,5,–2), (5,–1,0),

2) (1,4,2), (3,1,5),

3) (–1,2,4), (8,–4,–2),

4) (1,2,3), (5,1,4),

5) (1,2,–2), (8,–1,–5).

21. Известны координаты точек $A(4, 6, 3)$, $B(-5, 2, 6)$. Найти координаты точки, делящей отрезок AB в отношении 5:4.

1) (1,–34/9,–14/3),

2) (8/3, 2/3,7/3),

3) (–1,34/9,14/3),

4) (1,2,3),

5) (0,–1,–5).

22. Известны координаты точек $A(3, 2, 4)$, $C(2, -2, -1)$. Найти координаты точки, делящей отрезок AC в отношении 1:2.

1) (1,–34/9,–14/3),

2) (8/3, 2/3,7/3),

3) (–1,34/9,14/3),

4) (1,2,3),

5) (0,–1,–5).

253. Векторы $\vec{a}\,(k,4,1)$ и $\vec{b}\,(3,2,m)$ коллинеарны, если k и m равны:

1) $k = 6$, $m = 0,5$,

2) $k = -4$, $m = -1$,

3) $k = 4$, $m = 1$,

4) $k = -6$, $m = -1$,

5) $k = -6$, $m = -0,5$.

Список литературы

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: Для физ.-мат. и инж.-физ. спец. вузов/ Д.В. Беклемишев. - 5-е изд., перераб. – М.: Наука, 1984. - 320 с.
2. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М.: Наука, 1977.
3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление: Учебник для вузов. – 4-е изд., перераб. и доп. – Ростов н/Д: Феникс, 1997 – 512с.
4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: Учеб. пособие для втузов. В 2 ч. Ч.1. – 4-е изд., испр. и доп. – М.: Высш. шк., 1986. 304 с., ил.
5. Кремер Н.Ш., Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман. Высшая математика для экономистов: Учеб. пособие для вузов// Под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997. – 439 с.
6. Кремер Н.Ш., Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман. Высшая математика для экономических специальностей: Учебник и Практикум (часть I)// Под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – М.: Высшее образование, 2005. – 486 с.
7. Шнейдер В.Е. и др. Краткий курс высшей математики (в двух томах). Т. 1: Учеб. пособие для втузов. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Высшая школа, 1978. – 384 с., ил.

Крюкова Татьяна Владимировна

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Методическое пособие для студентов дневной формы обучения
направлений КТМ и ТМО

Редактор Е.Ф. Изотова

Подписано к печати 27.12.13. Формат 60х84/16.
Усл. печ. л. 2,13. Тираж 50 экз. Зак. 131231. Рег. № 83.

Отпечатано в РИО Рубцовского индустриального института
658207, Рубцовск, ул. Тракторная, 2/6.